

Dankert/Dankert: Technische Mechanik, 5. Auflage
Lösungen zu den Aufgaben, Teil 7 (Kapitel 20 - 25)

Lösung 20.1: $\tau_{max} = \pm 0,469 \text{ N/mm}^2$ an den Trägerenden.

Lösung 20.2: a) $F_{Q,max} = 30 q_0 a$ an der Einspannstelle,
 b) $\tau_{1,max} = 8,563 q_0/a$ und $\tau_{2,max} = 9,633 q_0/a$ an der Einspannstelle,
 c) $\tau_{max} = 10,40 q_0/a$ in der Schwerpunktfaser an der Einspannstelle.

Lösung 20.3: a) I: $\tau_B = 0,2387 \frac{Fl}{h d^2}$; II: $\tau_B = 0,1790 \frac{Fl}{h d^2}$;
 b) $d_{erf,l} = 0,299 \sqrt{\frac{Fl}{h \tau_{zul}}}$ (links von F) ; $d_{erf,r} = 0,160 \sqrt{\frac{Fl}{h \tau_{zul}}}$ (rechts von F) .

Lösung 21.1: a) $M = 191 \text{ Nm}$; b) $d_{gew} = 20 \text{ mm}$;
 c) $d_{i,gew} = 17 \text{ mm}$; d) $\varphi_{ges} = 1,78^\circ$.

Lösung 21.2: a) $\kappa = \lambda$;
 b) $d_{1,erf} = 32,9 \text{ mm}$; $d_{2,erf} = 27,7 \text{ mm}$.

Lösung 21.3: Bilden der zweiten partiellen Ableitungen von Φ und Einsetzen in (21.14) zeigt, dass die Poissonsche Differentialgleichung erfüllt ist. Für einen Rand, der der Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ entspricht, wird in Φ der Ausdruck in der Klammer gleich 1 und damit der gesamte Ausdruck konstant, so dass auch die Randbedingung (21.15) erfüllt ist. Einsetzen von Φ in (21.16) und Auflösen des Integrals führt auf den Wert, der in der Tabelle des Abschnitts 21.4 angegeben ist.

Lösung 21.4: a) $I_{t,a} = 1,05 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 > I_{t,b} = 6,42 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$;
 $W_{t,a} = 3,54 \cdot 10^4 \text{ mm}^3 > W_{t,b} = 2,06 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$.

Die Variante a) mit zwei dünnwandigen L-Profilen ist günstiger.

b) $\tau_1/\tau_2 = 20,5$; $\Delta\varphi_1/\Delta\varphi_2 = 106$.

Lösung 21.5: $b_2 = h^2/b_1$.

Lösung 22.1:

$$a) \quad \epsilon_{1,2} = \frac{1}{3} (\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) \pm \frac{2}{3} \sqrt{\epsilon_a^2 + \epsilon_b^2 + \epsilon_c^2 - \epsilon_a \epsilon_b - \epsilon_a \epsilon_c - \epsilon_b \epsilon_c} ;$$

$$b) \quad \sigma_{1,2} = \frac{E}{3(1-\nu^2)} \left[(1+\nu) (\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) \pm 2(1-\nu) \sqrt{\epsilon_a^2 + \epsilon_b^2 + \epsilon_c^2 - \epsilon_a \epsilon_b - \epsilon_a \epsilon_c - \epsilon_b \epsilon_c} \right] .$$

Lösung 22.2:

Die Lösungen zu den Fragestellungen a), b) und c) entsprechen den Lösungen der Aufgabe 8.4.

d) Maximale Biegespannung am Lager A (Ort des größten resultierenden Biegemoments):

$$M_{b,res} = 532 Nm \quad \Rightarrow \quad \sigma_{b,max} = 200,7 N/mm^2 .$$

e) Maximale Torsionsschubspannung zwischen den Zahnrädern am Außenrand der Welle:

$$\tau_{t,max} = 9,43 N/mm^2 .$$

f) Die maximale Vergleichsspannung ergibt sich am Lager A :

$$\sigma_{v,1} = 201,18 N/mm^2 ; \quad \sigma_{v,2} = 201,62 N/mm^2 ; \quad \sigma_{v,3} = 201,40 N/mm^2 .$$

Lösung 23.1:

$$a) \quad D_a = 10,97 \text{ cm} ; \quad b) \quad D_a = 7,41 \text{ cm} .$$

Lösung 23.2:

$$a) \quad b = 2,135 R ; \quad b) \quad b = 2,383 a .$$

Lösung 23.3:

$$a) \quad F_{kr} = 0,6621 \frac{E d^4}{l^2} ;$$

$$b) \quad \kappa = \frac{F l^2}{\pi E d^4}$$

Matrix A

Matrix B

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 5,63 & -4,64 & 1,22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 7,30 & -5,10 & 1,34 & 0 & 0 & 0 \\ & & 8,02 & -5,60 & 1,46 & 0 & 0 \\ (symmetrisch) & & & 8,79 & -6,13 & 1,6 & 0 \\ & & & & 9,62 & -6,70 & 1,75 \\ & & & & & 10,50 & -7,31 \\ & & & & & & 9,37 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ (symm.) & & & 2 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & -1 & 0 \\ & & & & & 2 & -1 \\ & & & & & & 2 \end{array} \right]$$

Lösung 24.1: a) $F_B = \frac{5}{2} F$; b) $F_B = \frac{9}{16} M/l$; c) $F_B = \frac{17}{8} ql$; d) $F_B = \frac{5}{16} F$.

Lösung 24.2: $F_{AV} = ql$; $F_{AH} = F_B = \frac{2}{7} ql$; $M_A = \frac{5}{14} ql^2$; $v_B = \frac{3ql^4}{56EI}$.

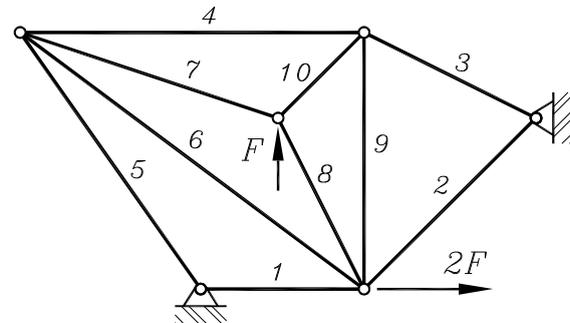
Lösung 24.3: $v_1 = \frac{ql^4}{16EI}$; $v_2 = \frac{3ql^4}{8EI}$; $\varphi_2 = \frac{5ql^3}{12EI}$.

Lösung 24.4:
$$v_F = \frac{12Fl^3 b_1^2}{Eh^3 (b_2 - b_1)^3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{b_2}{b_1} \right)^2 - 2 \frac{b_2}{b_1} + \frac{3}{2} + \ln \left(\frac{b_2}{b_1} \right) \right] ;$$

$\lim_{b_2 \rightarrow b_1} v_F = \frac{4Fl^3}{Eb_1 h^3}$ (z. B. durch dreimalige Anwendung der l'Hospitalschen Regel).

Lösung 24.5:

Die Stabkräfte sind bezüglich der nebenstehend skizzierten Nummerierung in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.



i	1	2	3	4	5
F_{Si} / F	0,9324	- 1,3441	- 0,2518	0,1566	0,1949
i	6	7	8	9	10
F_{Si} / F	- 0,2217	- 0,0921	0,6585	0,4945	- 0,5401

Lösung 24.6: $F_1 = 0,8657 F$; $F_2 = - 1,3704 F$; $F_c = 0,4514 F$;

$v_H = 1,939 \frac{Fl}{(EA)_1}$; $v_V = 0,1128 \frac{Fl}{(EA)_1}$.

Lösung 24.7: a) $F_c = \frac{F}{1 + \frac{3EI}{8ca^3}}$; b) $v_{CD} = \frac{F/c}{1 + \frac{3EI}{8ca^3}}$;

c) $F_c = cv_{CD}$;

$\gamma \rightarrow 0 \Rightarrow F_c \rightarrow 0 \Rightarrow v_{CD} = \frac{8Fa^3}{3EI}$; $\gamma \rightarrow \infty \Rightarrow F_c \rightarrow F \Rightarrow v_{CD} = 0$.

Lösung 25.1: Für die Vollscheibe gilt $C_2 = 0$, und aus $\sigma_r(r = r_a) = 0$ folgt C_1 . Damit erhält man für die Spannungen und die Radialverschiebung (r_{max} kennzeichnet den Ort der maximalen Radialverschiebung):

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (r_a^2 - r^2) ; \quad \sigma_t = \frac{\rho \omega^2}{8} [(3 + \nu) r_a^2 - (1 + 3 \nu) r^2] ;$$

$$u = \frac{\rho \omega^2 (1 - \nu) r}{8 E} [(3 + \nu) r_a^2 - (1 + \nu) r^2] ; \quad \frac{du}{dr} = 0 \Rightarrow r_{max} = \sqrt{\frac{3 + \nu}{3 + 3 \nu}} r_a .$$

Der Bildschirm-Schnappschuss zeigt die Funktionen für die gegebenen Zahlenwerte (links die Radialverschiebung, rechts die beiden Spannungsverläufe). Die Tangentialspannung ist mit Ausnahme des Scheibenmittelpunktes stets größer als die Radialspannung.

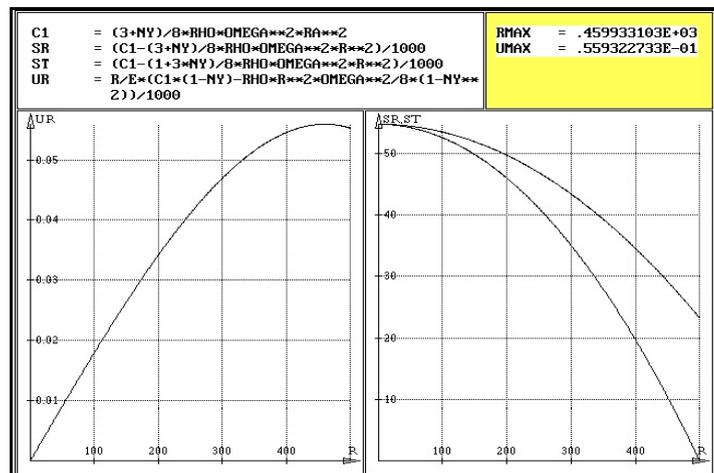
Die Auswertung ergibt folgende markanten Werte:

$$\sigma_r(0) = 54,7 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$\sigma_t(0) = 54,7 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$r_{max} = 460 \text{ mm} ;$$

$$u_{max} = u(r_{max}) = 0,0559 \text{ mm} .$$



Lösung 25.2:

$$a) \quad \Delta r = - \frac{\sigma_s r_i}{E} \left(\frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \nu \right) = 0,140 \text{ mm} ;$$

$$b) \quad \omega = 849 \text{ s}^{-1} .$$

Lösung 25.3:

Im linken Bild ist die obere Kurve die Tangentialspannung, die mittlere die konstante Spannung in Längsrichtung und die untere Kurve die Radialspannung, das rechte Bild zeigt die Tangentialverschiebung u_r (links oben sind die Funktionen aufgelistet).

