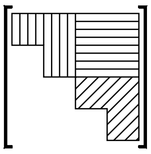
Dankert/Dankert: Technische Mechanik, 5. Auflage
Lösungen zu den Aufgaben, Teil 4 (Kapitel 15 - 17)

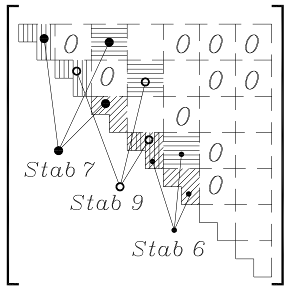
Lösung 15.1:



Element-Steifigkeitsmatrix

Jeweils drei 2*2-Untermatrizen einer Element-Steifigkeitsmatrix werden in die System-Steifigkeitsmatrix übertragen (Skizze rechts, durch die Schraffur gekennzeichnet).

Die "Nullen" in der System-Steifigkeitsmatrix deuten an, welche Positionen von keinem der 11 Elemente belegt werden.



$$K_6 = \frac{EA}{a}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} , \quad K_7 = \frac{EA}{2a}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} , \quad K_9 = \frac{\sqrt{5}\,EA}{25a}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 & -2 \\ & 1 & -2 & -1 \\ & & 4 & 2 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung 15.2:

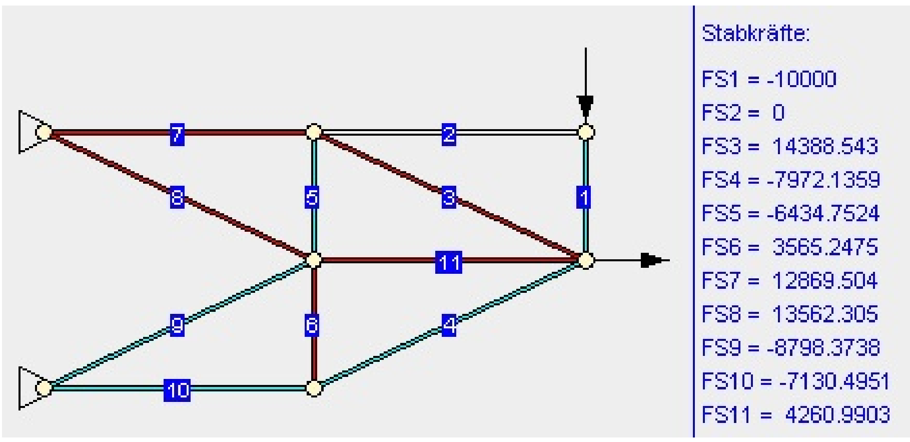
a) System-Steifigkeitsbeziehung, aus der sich mit $\boldsymbol{u_A = 0}$, $\boldsymbol{F_B = 0}$ und $\boldsymbol{u_C = 0}$ die Ergebnisse für *b*) und *c*) ergeben:

$$\begin{bmatrix} (EA/l)_1 & -(EA/l)_1 & 0 \\ & (EA/l)_1 + (EA/l)_2 & -(EA/l)_2 \\ & & (EA/l)_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_A - (EA\,\alpha_t\,\Delta T)_1 \\ F_B + (EA\,\alpha_t\,\Delta T)_1 - (EA\,\alpha_t\,\Delta T)_2 \\ F_C + (EA\,\alpha_T\,\Delta T)_2 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$b) \quad u_B = -\tfrac{1}{3}\,l\,\alpha_t\,\Delta T = -1{,}6\cdot 10^{-4}\,l \quad ; \qquad c) \quad F_A = 2\,EA_1\,\alpha_t\,\Delta T = 322{,}56\ kN \quad .$$

Lösung 15.3:

Der nachfolgende Ausschnitt aus einem Bildschirm-Schnappschuss des Programms "Statisch unbestimmte ebene Fachwerke" zeigt die berechneten Stabkräfte (Dimension: N).



a) Die Stäbe 1 und 2 dürfen auf keinen Fall entfernt werden.

b) Stab 11.

Lösung 16.1: a) $\boldsymbol{d_{erf} = 79{,}86\ \mathrm{mm}}$ ($\boldsymbol{d_{gew} = 80\ \mathrm{mm}}$) ; b) **48,8 %**

Lösung 16.2:

$$a_{erf} = \sqrt[3]{\frac{3\,F\,l}{\sigma_{zul}}} = 24{,}66\ mm \quad \Rightarrow \quad a_{gew} = 25\ mm \quad ,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F\,l/2 + \varrho\, g\, a_{gew}^2\, l^2/8}{a_{gew}^3/6} = 194{,}3\ \frac{N}{mm^2} \quad .$$

Das Aufrunden des errechneten Wertes für $\boldsymbol{a}$ genügt, das Eigengewicht erfordert keine größere Abmessung des Quadratquerschnittes. Dieses Ergebnis ist repräsentativ: Im Allgemeinen kann das Eigengewicht gegenüber der sonstigen Belastung vernachlässigt werden, was natürlich nicht gilt, wenn das Eigengewicht die wesentliche Belastung ist.

Lösung 16.3:

$$h(z) = \sqrt{\frac{6\,F\,z}{b\,\sigma_{\max}}}$$

Lösung 16.4:

$$b = \sqrt{3}\,D/3 \quad , \quad h = \sqrt{6}\,D/3 \quad .$$

Lösung 16.5: *a*) $\boldsymbol{|M_b|_{max} = 64{,}0\ \mathrm{Nm}}$ am Angriffspunkt der Kraft $\boldsymbol{3F}$;
b) $\boldsymbol{b_{erf} = 8{,}43\ \mathrm{mm}}$.

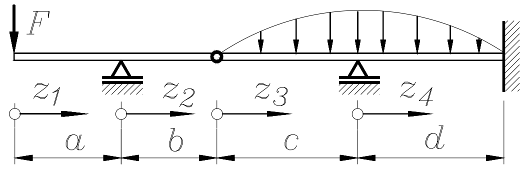
Lösung 16.6: *a*) $\boldsymbol{a_{erf} = 6{,}35\ \mathrm{mm}}$; b) $\boldsymbol{d_{zul} = 7{,}92\ \mathrm{mm}}$.

Lösung 16.7: *a*) $\boldsymbol{|M_b|_{max} = 6960\ \mathrm{Nm}}$ am Angriffspunkt der Kraft $\boldsymbol{F}$;
b) $\sigma_{b,\,max}$ **= 140** $\boldsymbol{\mathrm{N/mm^2}}$.

Lösung 16.8: *a*) $\boldsymbol{|M_b|_{max} = 2587{,}5\ \mathrm{Nm}}$ am Angriffspunkt der Kraft $\boldsymbol{3F}$;
b) $\sigma_{b,\,max}$ **= 219** $\boldsymbol{\mathrm{N/mm^2}}$;
c) Ja .

Lösung 16.9: *a*) $\boldsymbol{|M_b|_{max} = 2250\ \mathrm{N\,cm}}$ in der Mitte des Trägers;
b) $\boldsymbol{a_{erf,1} = 2{,}32\ \mathrm{mm}}$; $\boldsymbol{a_{erf,2} = 2{,}46\ \mathrm{mm}}$.

Lösung 17.1:



a)

1.) $v_1\ (z_1 = a) = 0$,
2.) $v_2\ (z_2 = 0) = 0$,
3.) $v_1'\ (z_1 = a) = v_2'\ (z_2 = 0)$,
4.) $v_2\ (z_2 = b) = v_3\ (z_3 = 0)$,
5.) $v_3\ (z_3 = c) = 0$,
6.) $v_4\ (z_4 = 0) = 0$,
7.) $v_3'\ (z_3 = c) = v_4'\ (z_4 = 0)$,
8.) $v_4\ (z_4 = d) = 0$,
9.) $v_4'\ (z_4 = d) = 0$.

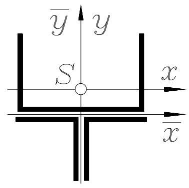
b) Zusätzlich zu den unter *a*) angegebenen Randbedingungen:

10.) $v_1''\ (z_1 = 0) = 0$,
11.) $v_1'''\ (z_1 = 0) = F/EI$,
12.) $v_1''\ (z_1 = a) = v_2''\ (z_2 = 0)$,
13.) $v_2''\ (z_2 = b) = 0$,
14.) $v_3''\ (z_3 = 0) = 0$,
15.) $v_2'''\ (z_2 = b) = v_3'''\ (z_3 = 0)$,
16.) $v_3''\ (z_3 = c) = v_4''\ (z_4 = 0)$.

Lösung 17.2: $F = \dfrac{3}{13}\, q_0\, a$.

Lösung 17.3: Gesamtschwerpunkt bei $\bar{y}_S = \mathbf{0{,}8184\ cm}$;

Flächenträgheitsmoment: $I_{xx} = \mathbf{13{,}59\ cm^4}$.



Eigengewichtsbelastung entspricht konstanter Linienlast mit

$$q_0 = (4{,}87 + 2 \cdot 0{,}88)\ kg/m \cdot 9{,}81\ m/s^2 = 65{,}04\ N/m \quad .$$

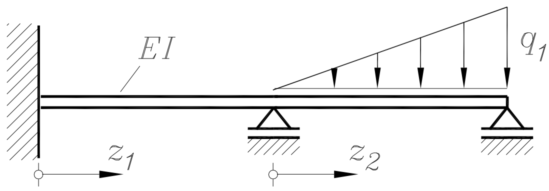
Lastfall *f* (Abschnitt 17.4) liefert: $v_{max} = (q_0\, l^4)/(8\, EI) = \mathbf{0{,}117\ mm}$.

Lösung 17.4:

$$F_{AH} = 0 \ ;\quad F_{AV} = \frac{73}{1152}\, q_1 l \ ;\quad F_B = \frac{119}{288}\, q_1 l \ ;\quad F_C = \frac{3}{128}\, q_1 l \ .$$

Lösung 17.5: Die Ergebnisse werden unter Verwendung der nebenstehend skizzierten Koordinaten angegeben.

Biegelinie und Schnittgrößen werden also jeweils mit zwei Funktionen beschrieben:



a)

$$v_1 = \frac{q_1}{EI}\left[\frac{1}{120}\, a\, z_1^3 - \frac{1}{120}\, a^2 z_1^2\right] = \frac{q_1 a^4}{120\, EI}\left(\frac{z_1}{a}\right)^2\left(\frac{z_1}{a} - 1\right) \quad ,$$

$$v_2 = \frac{q_1}{EI}\left[\frac{1}{120\, a}\, z_2^5 - \frac{1}{30}\, a\, z_2^3 + \frac{1}{60}\, a^2 z_2^2 + \frac{1}{120}\, a^3 z_2\right]$$

$$= \frac{q_1 a^4}{120\, EI}\left(\frac{z_2}{a}\right)\left[\left(\frac{z_2}{a}\right)^4 - 4\left(\frac{z_2}{a}\right)^2 + 2\,\frac{z_2}{a} + 1\right] \quad .$$

b)

$$M_{b1} = -EI\,v_1'' = -\frac{q_1\,a^2}{120}\left(6\,\frac{z_1}{a} - 2\right) = -\frac{q_1\,a^2}{60}\left(3\,\frac{z_1}{a} - 1\right) \quad ,$$

$$M_{b2} = -EI\,v_2'' = -\frac{q_1\,a^2}{120}\left[20\left(\frac{z_2}{a}\right)^3 - 24\,\frac{z_2}{a} + 4\right] = -\frac{q_1\,a^2}{30}\left[5\left(\frac{z_2}{a}\right)^3 - 6\,\frac{z_2}{a} + 1\right] \quad ,$$

$$F_{Q1} = -\frac{q_1\,a}{20} \quad , \qquad F_{Q2} = -\frac{q_1\,a}{10}\left[5\left(\frac{z_2}{a}\right)^2 - 2\right] \quad .$$

c) Die Lagerreaktionen werden aus den Schnittgrößen berechnet. Mit den in der Skizze angegebenen Definitionen für die Lagerkräfte ermittelt man aus Gleichgewicht an den freigeschnittenen Lagern:

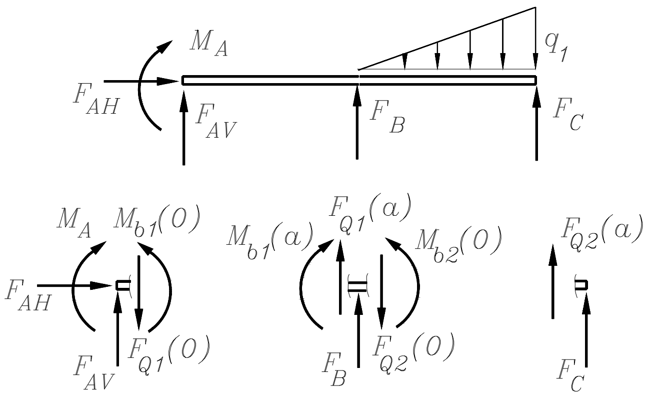
$$F_{AH} = 0 \quad ,$$

$$F_{AV} = F_{Q1}(0) = -\frac{1}{20}\,q_1\,a \quad ,$$

$$M_A = M_{b1}(0) = \frac{1}{60}\,q_1\,a^2 \,,$$

$$F_B = F_{Q2}(0) - F_{Q1}(a) = \frac{1}{4}\,q_1\,a \quad ,$$

$$F_C = -F_{Q2}(a) = \frac{3}{10}\,q_1\,a \quad .$$



d) Notwendige Bedingungen für Extremwerte der Durchbiegung in den beiden Bereichen:

$$v_1' = \frac{q_1\,a^3}{120\,EI}\left[3\left(\frac{\bar{z}_1}{a}\right)^2 - 2\,\frac{\bar{z}_1}{a}\right] = 0 \;,\quad v_2' = \frac{q_1\,a^3}{120\,EI}\left[5\left(\frac{\bar{z}_2}{a}\right)^4 - 12\left(\frac{\bar{z}_2}{a}\right)^2 + 4\,\frac{\bar{z}_2}{a} + 1\right] = 0 \;.$$

Die erste Gleichung hat zwei Lösungen, von denen eine ($\bar{z}_1 = 0$) die Randbedingungen (keine Durchbiegung und horizontale Tangente) an der Einspannung widerspiegelt und für die Beantwortung der Frage nicht von Interesse ist. Die zweite Gleichung hat vier Lösungen (Berechnung siehe www.DankertDankert.de), von denen nur eine im Bereich $0 \le z_2 \le 0$ liegt. Die interessierenden Lösungen (Stellen der relativen Extremwerte) und die dazugehörigen Durchbiegungen sind (die maximale Durchbiegung tritt erwartungsgemäß im zweiten Bereich auf):

$$\bar{z}_1 = \frac{2}{3}\,a \qquad \Rightarrow \qquad v_{1,\max} = -0{,}0012346\,\frac{q_1\,a^4}{EI} \quad ;$$

$$\bar{z}_2 = 0{,}55468\,a \qquad \Rightarrow \qquad v_{2,\max} = 0{,}0044991\,\frac{q_1\,a^4}{EI} \quad .$$

e) Für das größte Biegemoment kommen die Stellen ***A*** und ***B*** in Frage (Bereichsgrenzen des ersten Bereichs mit linearem Momenten-Verlauf) und ein eventuell im zweiten Bereich vorhandener relativer Extremwert. Zur Ermittlung dieser Stelle wird die Nullstelle der Querkraft F_{Q2} berechnet:

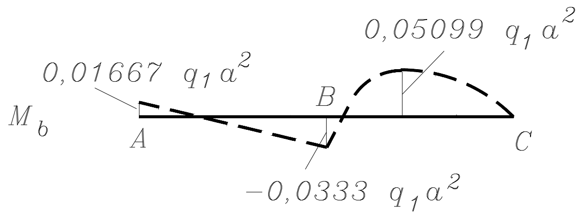
$$F_{Q2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{z}_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}\, a \quad \Rightarrow \quad M_{b2}(z_2 = \tilde{z}_2) = 0{,}05099\, q_1\, a^2 \quad .$$

Momente an den Grenzen des Bereichs 1:

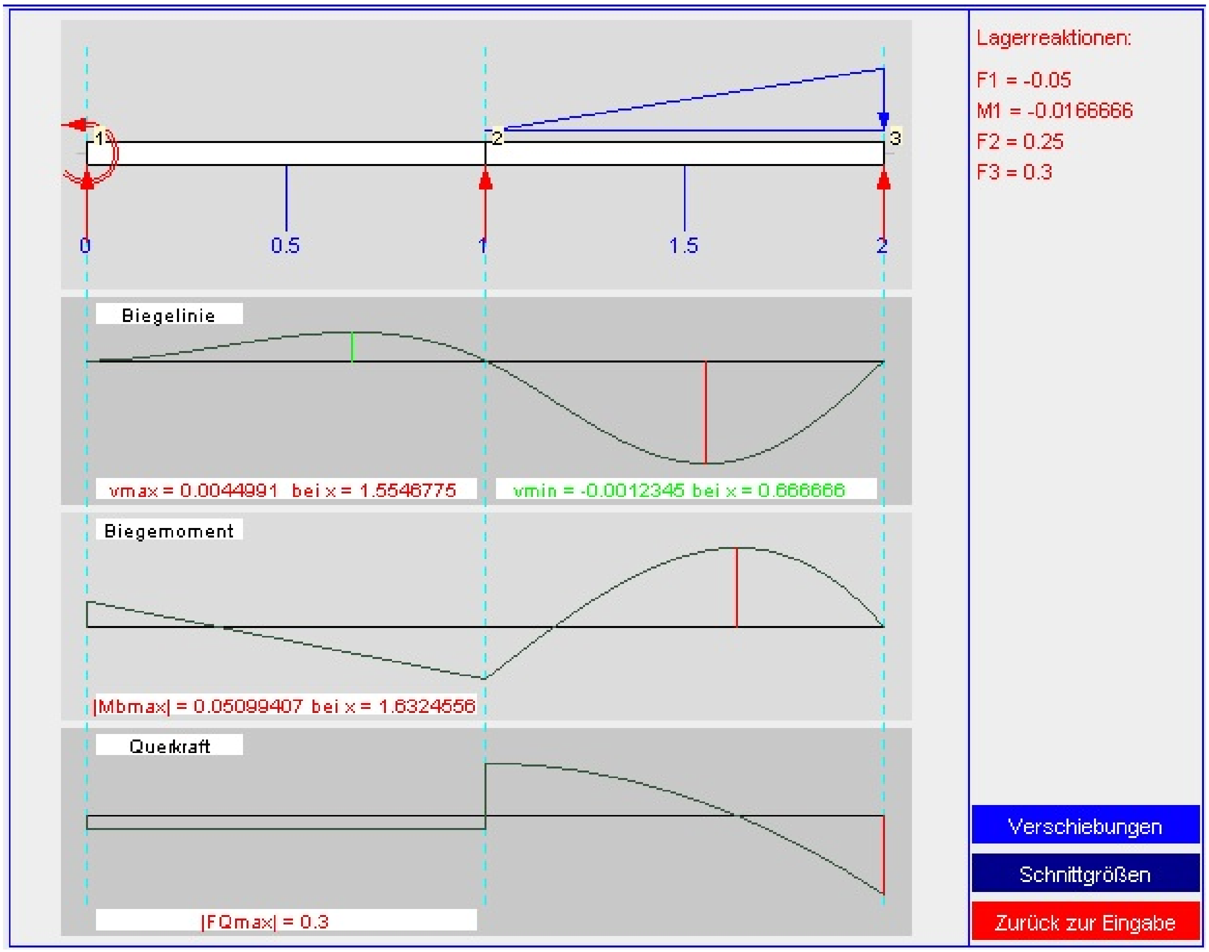
$$M_{b1}(z_1 = 0) = \quad 0{,}01667\, q_1\, a^2 \quad ;$$

$$M_{b1}(z_1 = a) = -\, 0{,}03333\, q_1\, a^2 \quad .$$

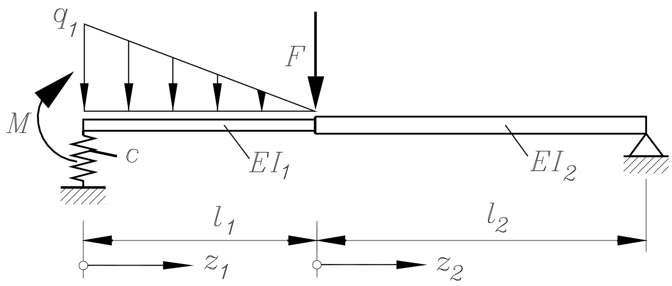
Das absolut größte Biegemoment liegt im rechten Bereich. Den qualitativen Verlauf des Biegemoments zeigt die nebenstehende Skizze.



Kontrollrechnung mit dem Programm "Statisch unbestimmte gerade Biegeträger":

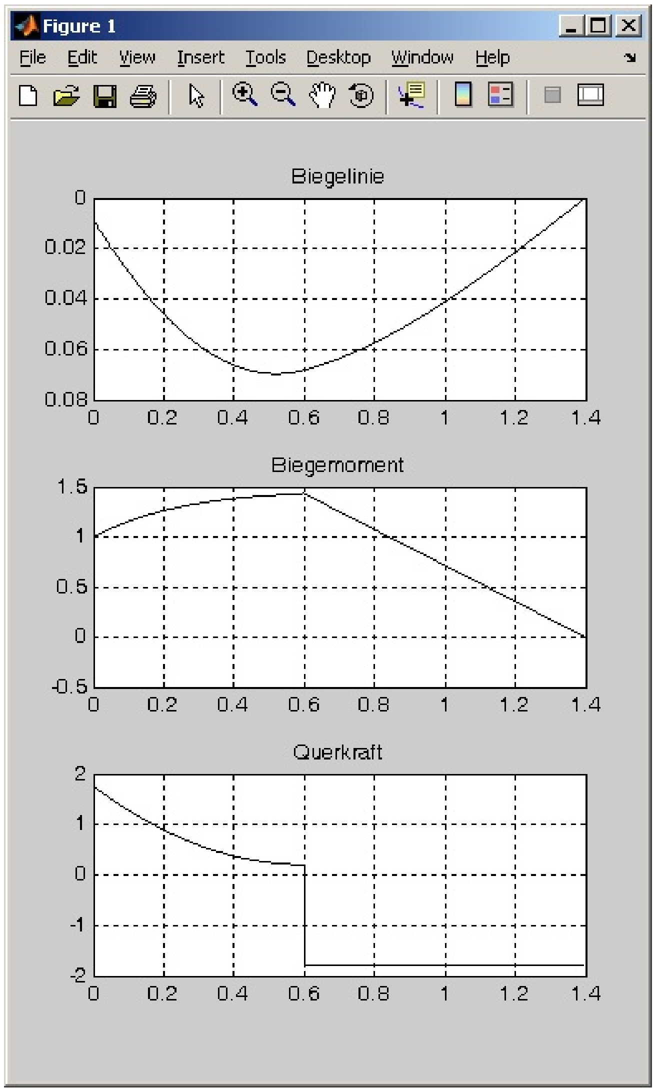


Lösung 17.6: Nach dem Aufschreiben der Differenzialgleichungen der Biegelinie 4. Ordnung für die beiden Bereiche unter Verwendung der nebenstehend skizzierten Koordinaten wird das Gleichungssystem für die acht Integrationskonstanten formuliert.



Die Lösung des Gleichungssystems wird sinnvollerweise einem Mathematik-Programm übertragen. Danach kann die Biegelinie aufgeschrieben werden. Man sollte allerdings auch die Auswertung dem Programm übertragen.

Nebenstehend ist das Ergebnis der Berechnung mit Matlab zu sehen. Die maximale Durchbiegung erkennt man im linken Bereich. Der Ort wird auch numerisch ermittelt (Bedingung: Biegewinkel ist gleich Null). Mit Matlab errechnet man:



$$\boldsymbol{v_{max} = 69{,}656\ \mathrm{mm}} \text{ bei } \boldsymbol{z_1 = 521{,}4\ \mathrm{mm}}\ .$$

Der Ort des maximalen Biegemoments ist die Bereichsgrenze (Angriffspunkt der Kraft F):

$$\boldsymbol{|M_b|_{max} = 1{,}435\ \mathrm{kNm}}\ .$$

Die Federkraft erhält man aus der Beziehung

$$\boldsymbol{F_c = c\, v_1\, (z_1 = 0)}\ .$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten erhält man:

$$\boldsymbol{F_c = 1{,}766\ \mathrm{kN}}\ .$$

Man hat mehrere Möglichkeiten, die Ergebnisse zu verifizieren:

- In das Momentengleichgewicht um das rechte Lager gehen die drei gegebenen Belastungen und die Federkraft ein. Aus dieser Gleichung kann die Federkraft berechnet und das oben angegebene Ergebnis bestätigt werden.

- Das Momentengleichgewicht um den Angriffspunkt der Feder (oder das Gleichgewicht der vertikalen Kräfte bei bekannter Federkraft) liefert die Lagerkraft des rechten Lagers, die der Querkraft an diesem Punkt entsprechen muss.

- Auch das Biegemoment am Kraftangriffspunkt kann bei bekannten Lagerreaktionen aus einer statischen Gleichgewichtsbedingung berechnet werden.

- Eine besonders wirkungsvolle Kontrolle liefert eine Berechnung mit einem Programm, dem das physikalische Modell der Aufgabe beschrieben werden kann. Nachfolgend ist das Ergebnis der Berechnung mit dem Programm "Statisch unbestimmte gerade Biegeträger" zu sehen: