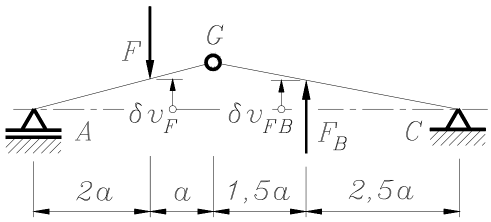
Dankert/Dankert: Technische Mechanik, 5. Auflage
Lösungen zu den Aufgaben, Teil 10 (Kapitel 33 - 34)

Lösung 33.1: Das Verhältnis der virtuellen Verschiebungen der beiden Kräfte ergibt sich aus der Geometrie:

$$\frac{3\,a}{2\,a}\,\delta v_F = \frac{4\,a}{2{,}5\,a}\,\delta v_{FB} \quad\Rightarrow\quad \delta v_F = \frac{16}{15}\,\delta v_{FB} \quad ;$$

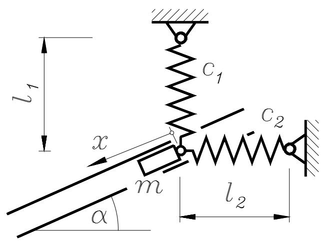
$$\delta W = F_B\,\delta v_{FB} - F\,\delta v_F = 0 \quad\Rightarrow\quad F_B = \frac{16}{15}\,F \; .$$



Lösung 33.2: Wenn die potenzielle Energie in der Lage $x = 0$ (willkürlich) Null gesetzt wird (die Federn sind in dieser Lage entspannt), gilt:

$$\frac{U}{m\,g\,l_1} = -\frac{x}{l_1}\sin\alpha + \frac{1}{2}\frac{c_1\,l_1}{m\,g}\left[\sqrt{1 + 2\,\frac{x}{l_1}\sin\alpha + \left(\frac{x}{l_1}\right)^2} - 1\right]^2$$

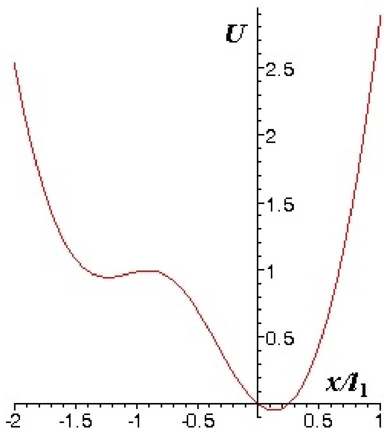
$$+ \frac{1}{2}\frac{c_2\,l_2}{m\,g}\frac{l_2}{l_1}\left[\sqrt{1 + 2\,\frac{l_1}{l_2}\frac{x}{l_1}\cos\alpha + \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2\left(\frac{x}{l_1}\right)^2} - 1\right]^2 .$$



Die Bestimmung der Extremwerte dieser Funktion für die drei Parameterkombinationen wird einem Mathematik-Programm übertragen: Unter www.DankertDankert.de findet man ein Maple-Worksheet, mit dem dies realisiert wird.

Die Rechnung bestätigt die Ergebnisse, die als Lösungen der Aufgaben 10.3 und 10.4 angegeben sind. Rechts sieht man die von Maple gezeichnete Funktion für die dimensionslose potenzielle Energie für den Fall *c* der Aufgabenstellung, die drei Extremwerte hat.

Der mittlere Extremwert (bei $x_1/l_1 = -0{,}9016$) ist ein Maximum, deshalb ist diese Gleichgewichtslage instabil.



Lösung 33.3:

$$\frac{3}{2}\,m\,\ddot{x} + c\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2 - 2\,b\,x\,\sin\alpha}}\right)(x - b\sin\alpha) = m\,g\sin\alpha \quad .$$

Lösung 33.4:

$$\ddot{x}\,(m_1 + m_2) - \ddot{\varphi}\,m_2\,l\sin\varphi - m_2\,l\,\dot{\varphi}^2\cos\varphi + c\,x = 0 \quad ;$$

$$-\ddot{x}\,m_2\,l\sin\varphi + \ddot{\varphi}\,m_2\,l^2 + m_2\,g\,l\sin\varphi = 0 \quad .$$

Lösung 33.5:

$$\tilde{v} = \frac{F\,l^3}{E\,t^3\,(b_0 + 3\,b_1)}\left[3\,\frac{z}{l} - 4\left(\frac{z}{l}\right)^3\right] \quad ;$$

$$\tilde{v}_{\max} = \tilde{v}\left(z = \frac{l}{2}\right) = \tilde{\kappa}\,\frac{F\,l^3}{E\,t^3\,b_0} \quad .$$

b_1/b_0	1	1,2	1,5	2
$\tilde{\kappa}$	0,25	0,217	0,182	0,143
κ_{exakt}	0,25	0,218	0,183	0,145

Lösung 33.6:

a)

$$k = 0 : \qquad \omega_0 = 7{,}011\sqrt{\frac{EI}{Ml^3}} \quad ;$$

$$k = 1 : \qquad \omega_1 = 5{,}717\sqrt{\frac{EI}{Ml^3}} \quad ;$$

$$k = 10 : \qquad \omega_{10} = 2{,}853\sqrt{\frac{EI}{Ml^3}} \quad ;$$

b)

$$k = 0 : \qquad \overline{\omega_0} = 6{,}928\sqrt{\frac{EI}{Ml^3}} \quad .$$

Lösung 34.1: Mit den Richtungskosinussen

$$c_x = \cos\alpha_x = \frac{x_2 - x_1}{l_e} \quad , \quad c_y = \cos\alpha_y = \frac{y_2 - y_1}{l_e} \quad , \quad c_z = \cos\alpha_z = \frac{z_2 - z_1}{l_e} \quad ,$$

$$l_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ergibt sich folgende Element-Steifigkeitsbeziehung:

$$\begin{bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{1z} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{2z} \end{bmatrix} = \left(\frac{EA}{l}\right)_e \begin{bmatrix} c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z & -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z \\ & c_y^2 & c_y c_z & -c_x c_y & -c_y^2 & -c_y c_z \\ & & c_z^2 & -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 \\ & symm. & & c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z \\ & & & & c_y^2 & c_y c_z \\ & & & & & c_z^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{2z} \end{bmatrix} \quad .$$

Lösung 34.2: Für die Verformung des elastisch gebetteten Biegeträgers wird für die Differenzialgleichung

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[EI(z)\,\frac{d^2v(z)}{dz^2}\right] + k(z)\;v(z) = q(z)$$

das äquivalente Variationsproblem formuliert:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_l \left[EIv^{\prime\prime 2} + k\,v^2\right]dz - \int\limits_l q\,v\,dz + W_i^* - \tilde{W}_a^* \quad\Rightarrow\quad \textit{Minimum} \quad .$$

Mit den für jedes Element e geltenden Ansatzfunktionen

$$\tilde{v}_e = v_i\left(1 - 3\frac{z_e^2}{l_e^2} + 2\frac{z_e^3}{l_e^3}\right) + \varphi_i\left(z_e - 2\frac{z_e^2}{l_e} + \frac{z_e^3}{l_e^2}\right) + v_j\left(3\frac{z_e^2}{l_e^2} - 2\frac{z_e^3}{l_e^3}\right) + \varphi_j\left(-\frac{z_e^2}{l_e} + \frac{z_e^3}{l_e^2}\right)$$

$$= v_i\,g_1(z_e) + \varphi_i\,g_2(z_e) + v_j\,g_3(z_e) + \varphi_j\,g_4(z_e)$$

kann das elastische Potenzial für das gesamte System aufgeschrieben werden:

$$\Pi = \ldots + \frac{1}{2}\int\limits_{l_e}\left(EI_e\tilde{v}_e^{\prime\prime 2} + k_e\tilde{v}_e^{\,2}\right)dz_e + \frac{1}{2}\int\limits_{l_f}\left(EI_f\tilde{v}_f^{\prime\prime 2} + k_f\tilde{v}_f^{\,2}\right)dz_f + \ldots$$

$$\ldots - \int\limits_{l_e} q_e\,\tilde{v}_e\,dz_e - \int\limits_{l_f} q_f\,\tilde{v}_f\,dz_f - \ldots \quad\Rightarrow\quad \textit{Minimum} \quad .$$

Aus den Minimalbedingungen (partielle Ableitungen nach allen Ansatzparametern müssen verschwinden) können die Anteile für das Element e herausgefiltert werden und zur Element-Steifigkeitsbeziehung zusammengestellt werden:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} & k_{14}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} & k_{24}^{(e)} \\ k_{31}^{(e)} & k_{32}^{(e)} & k_{33}^{(e)} & k_{34}^{(e)} \\ k_{41}^{(e)} & k_{42}^{(e)} & k_{43}^{(e)} & k_{44}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_j \\ \varphi_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \\ f_3^{(e)} \\ f_4^{(e)} \end{bmatrix} = 0 \qquad \textit{mit} \quad k_{mn} = \int\limits_{l_e}\left(EI_e\,g_m^{\prime\prime}g_n^{\prime\prime} + k_e g_m g_n\right)dz_e$$

$$\textit{und} \quad f_m = \int\limits_{l_e} q_e\,g_m\,dz_e$$

$$(m, n = 1, 2, 3, 4) \quad .$$

Für konstantes EI_e und konstantes k_e innerhalb eines Elements können die Integrale geschlossen gelöst werden. Das Ergebnis ist die als Gleichung 19.10 angegebene Element-Steifigkeitsbeziehung.