Dankert/Dankert: Technische Mechanik, 5. Auflage
Lösungen zu den Aufgaben, Teil 5 (Kapitel 18)

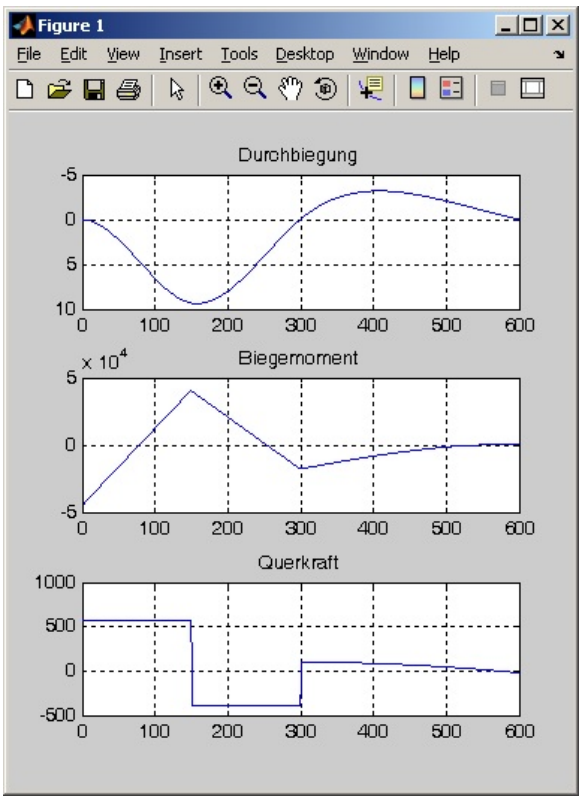
Lösung 18.1: Die Aufgabe wird nach der im Beispiel des Abschnitt 18.1.5 demonstrierten Strategie für die Lösung mit einem Mathematik-Programm aufbereitet.

Die nebenstehende Graphik zeigt das Ergebnis der Lösung mit Matlab. Die gesamte Länge l des Trägers wurde in 1200 Abschnitte eingeteilt. Als maximale Durchbiegung wurde errechnet:

$$v_{max} = 9{,}38 \text{ mm}$$

(159 mm vom linken Rand entfernt).

Das verwendete Matlab-Script findet man unter www.DankertDankert.de.



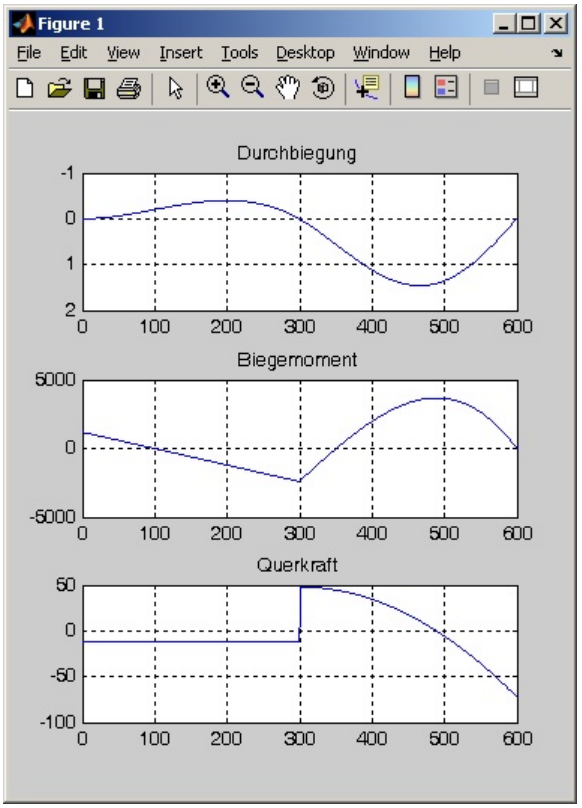
a) Für den Sonderfall $F = 0$ (Belastung nur durch die Linienlast) liegt der Ort der maximalen Durchbiegung erwartungsgemäß im rechten Abschnitt (nebenstehende Graphik).

Als maximale Durchbiegung wurde errechnet:

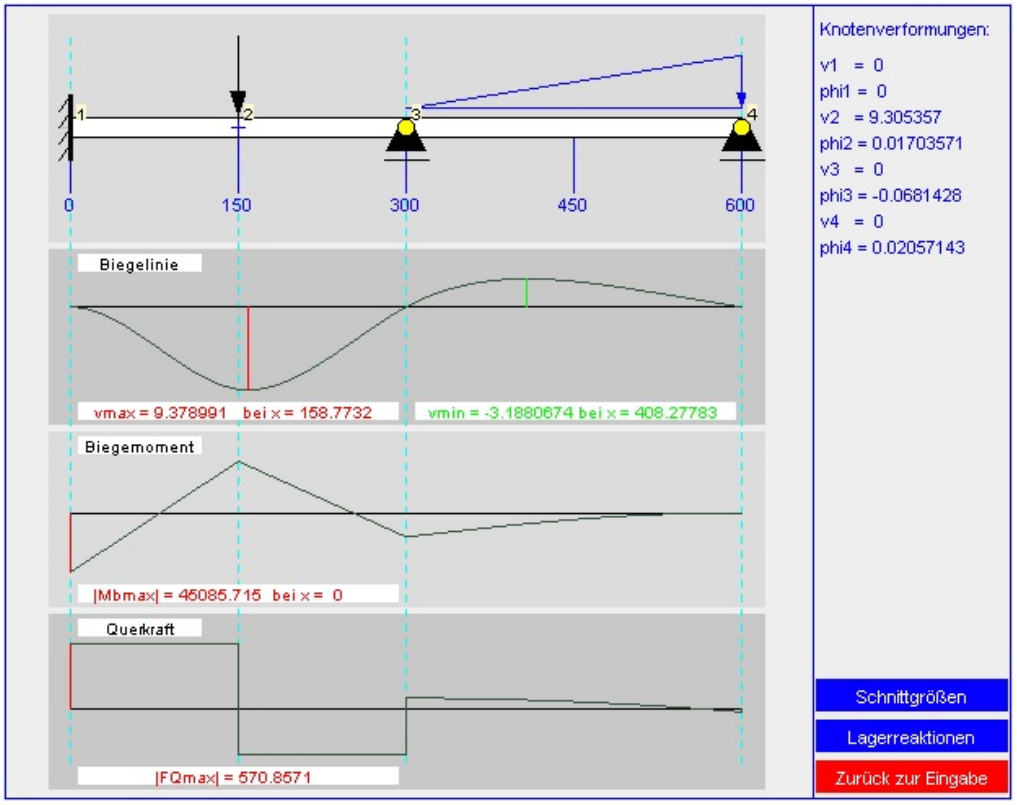
$$v_{max} = 1{,}46 \text{ mm}$$

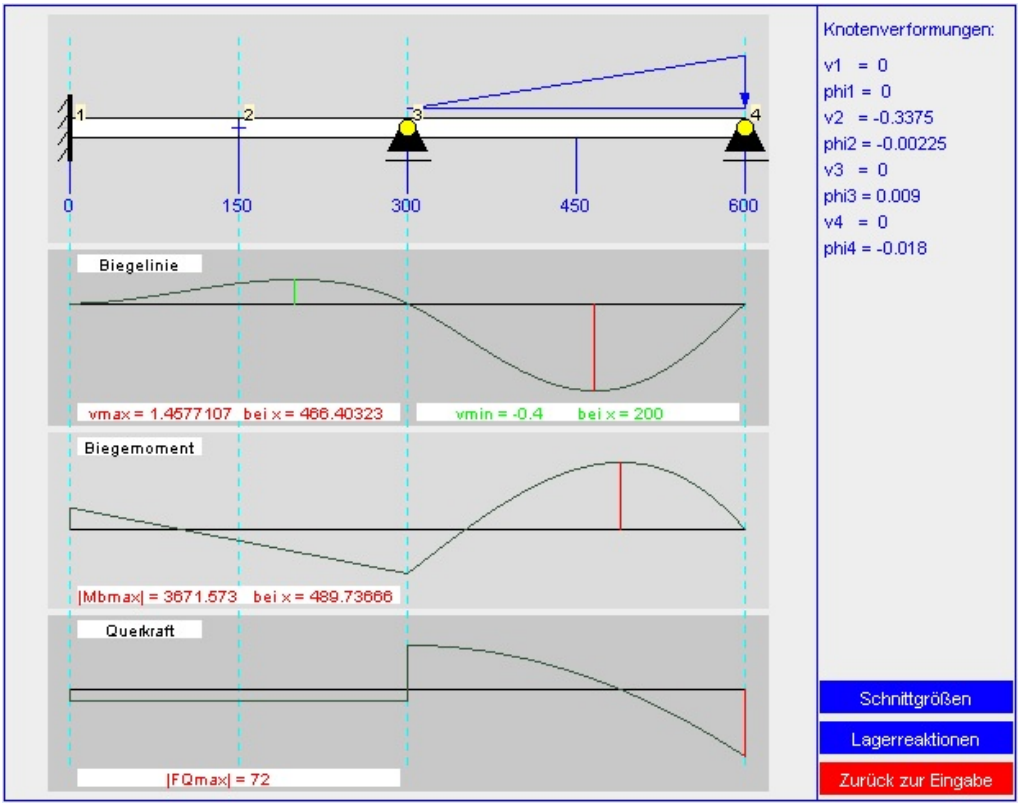
(134 mm vom rechten Rand entfernt).

Der Vergleich mit der analytischen Lösung der Aufgabe 17.5 zeigt, dass die dort ermittelten Ergebnisse mit den hier verwendeten Zahlenwerten in den angegebenen drei Stellen übereinstimmen.



b) Die Ergebnisse wurden mit dem Programm " Statisch unbestimmte gerade Biegeträger" (www.TM-interaktiv.de) nachgerechnet. Die beiden nachfolgend zu sehenden Graphiken zeigen die ausgezeichnete Übereinstimmung.



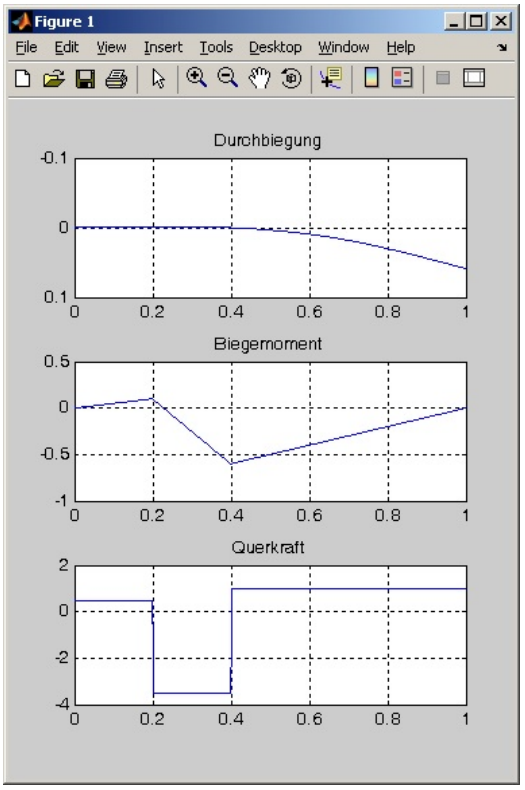


Lösung 18.2: Die Aufgabe wird nach der im Beispiel des Abschnitt 18.1.5 demonstrierten Strategie für die Lösung mit einem Mathematik-Programm aufbereitet.

Weil keine Zahlenwerte gegeben sind, wird für alle Parameter (l, F, I, E) der Wert 1 verwendet. Dann sind die berechneten Verschiebungen mit Fl^3/EI, die Biegemomente mit Fl und die Querkräfte mit F zu multiplizieren.

Die nebenstehende Graphik zeigt das Ergebnis der Lösung mit Matlab. Die gesamte Länge l des Trägers wurde in 1000 Abschnitte eingeteilt. Als Durchbiegungen wurden errechnet:

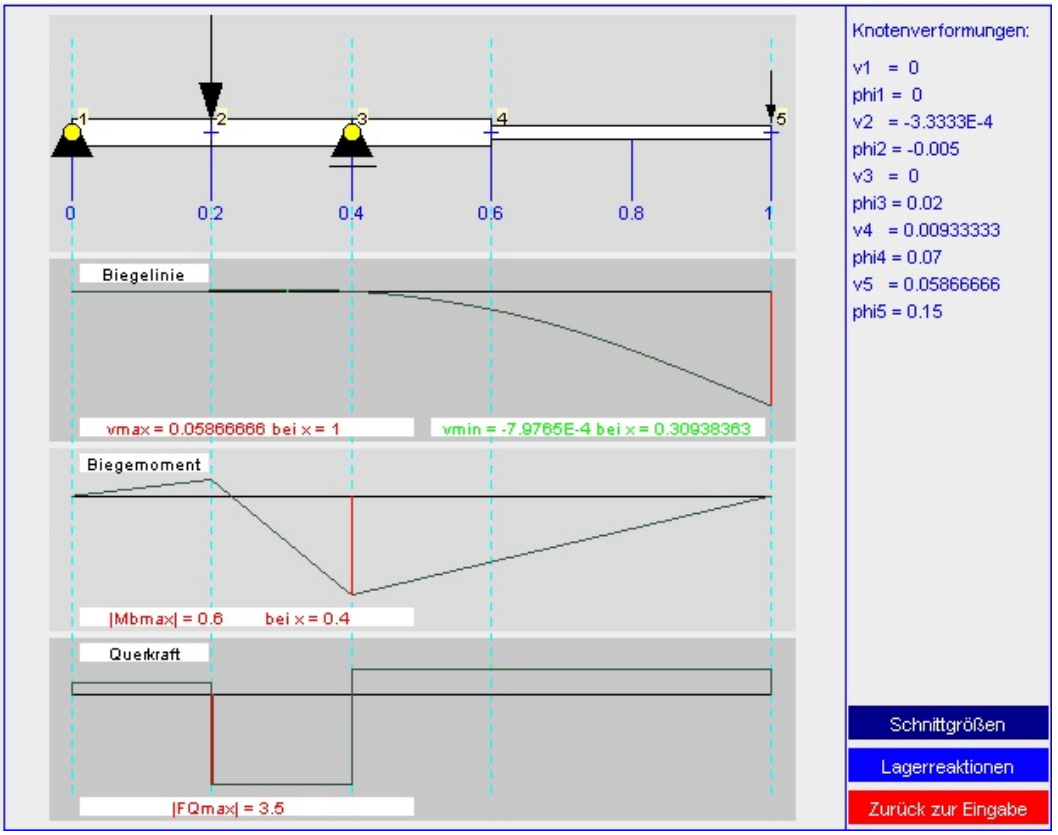
$$v_{4F} = -\,0{,}000333\ Fl^3/EI\ ;\quad v_F = 0{,}0587\ Fl^3/EI\ .$$



Aus statischen Gleichgewichtsbedingungen berechnet man am mittleren Lager ein Biegemoment $M_{b,L} = -\,0{,}6\ Fl$ und die Lagerreaktion $F_L = 4{,}5\ F$. Das Biegemoment ergibt sich mit dem Differenzenverfahren exakt, ebenso die Lagerreaktion als Differenz aus der Querkraft rechts vom Lager $F_{Q,r} = F$ und der Querkraft links vom Lager $F_{Q,l} = -\,3{,}5\ F$.

Das verwendete Matlab-Script findet man unter www.DankertDankert.de.

Die Kontrollrechnung mit dem Programm "Statisch unbestimmte gerade Biegeträger" (www.TM-interaktiv.de) bestätigt die Ergebnisse:



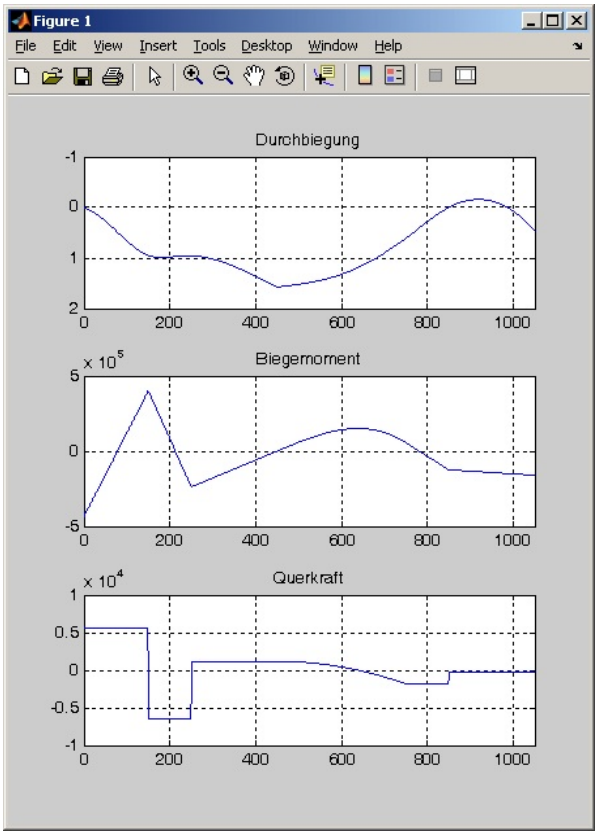
Lösung 18.3: Die Aufgabe wird nach der im Beispiel des Abschnitt 18.1.5 demonstrierten Strategie für die Lösung mit einem Mathematik-Programm aufbereitet.

Die nebenstehende Graphik zeigt das Ergebnis der Lösung mit Matlab. Die gesamte Gesamtlänge des Trägers wurde in 1050 Abschnitte eingeteilt. Als spezielle Werte wurden die Durchbiegung am Gelenk und das maximale Biegemoment berechnet:

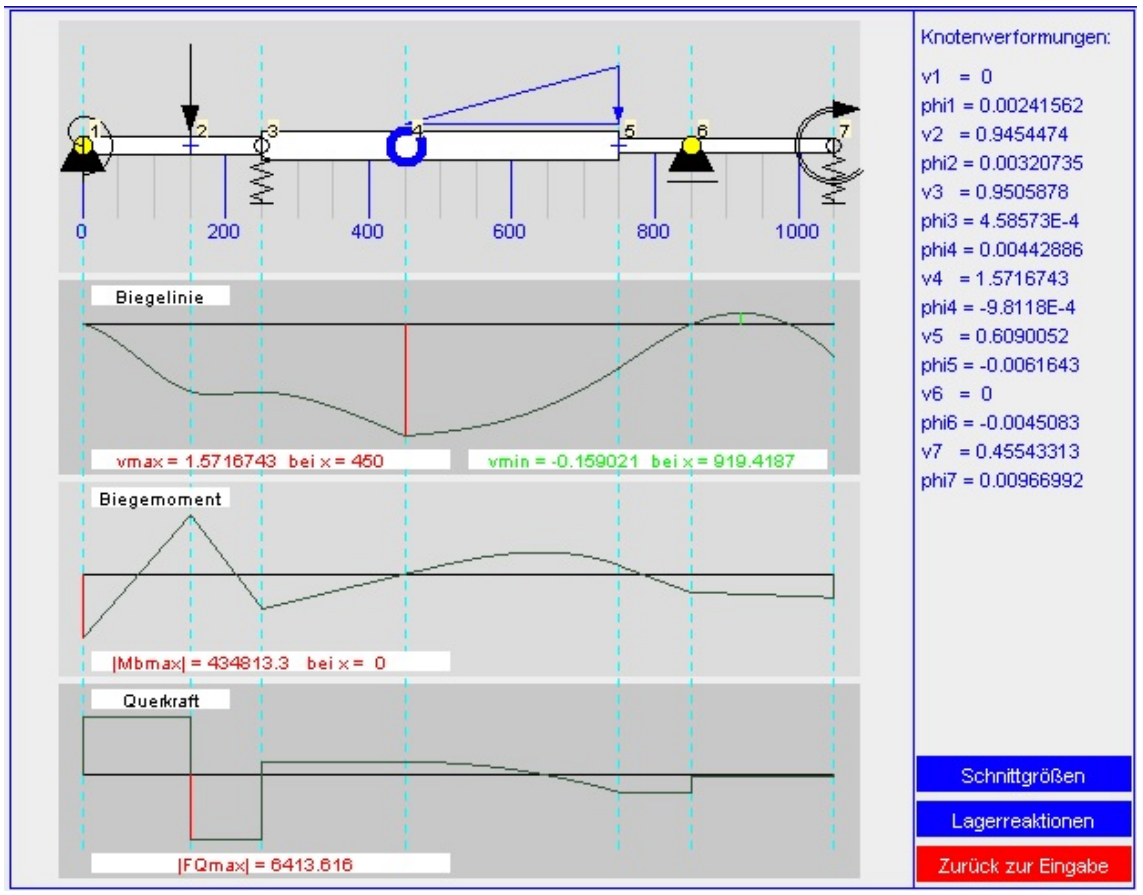
$$v_{Gelenk} = 1{,}57 \text{ mm} ;$$

$$|M_b|_{max} = 4{,}35 \cdot 10^5 \text{ Nmm} .$$

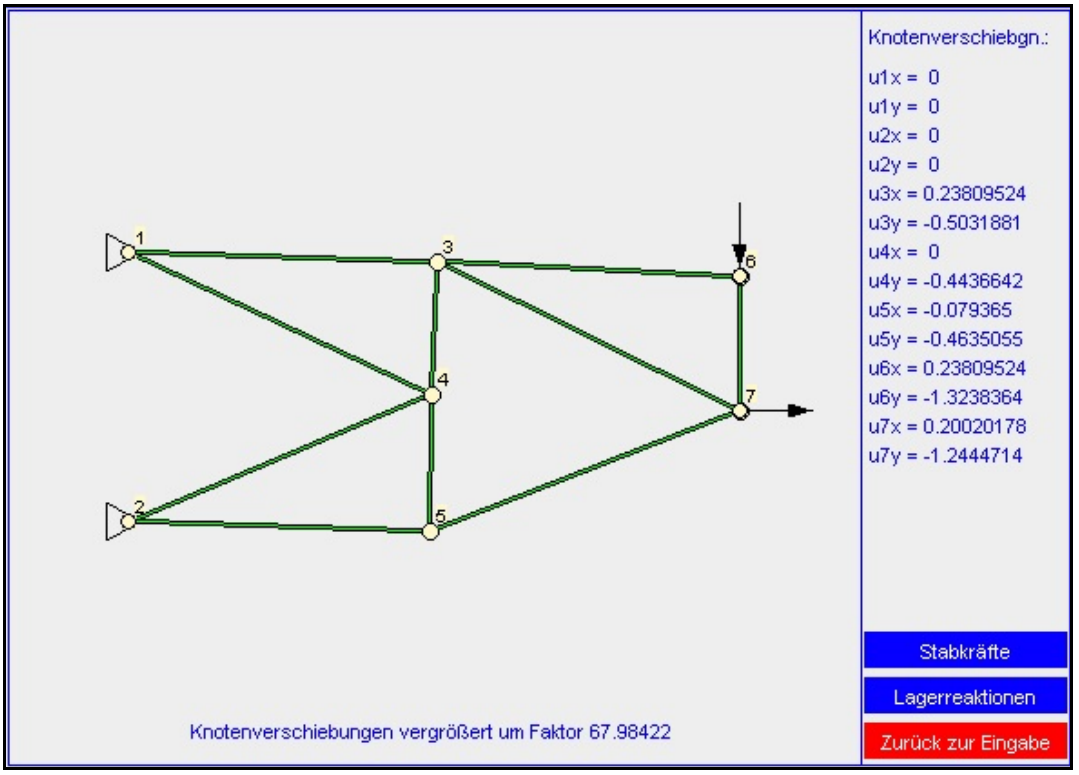
Das verwendete Matlab-Script findet man unter www.DankertDankert.de.

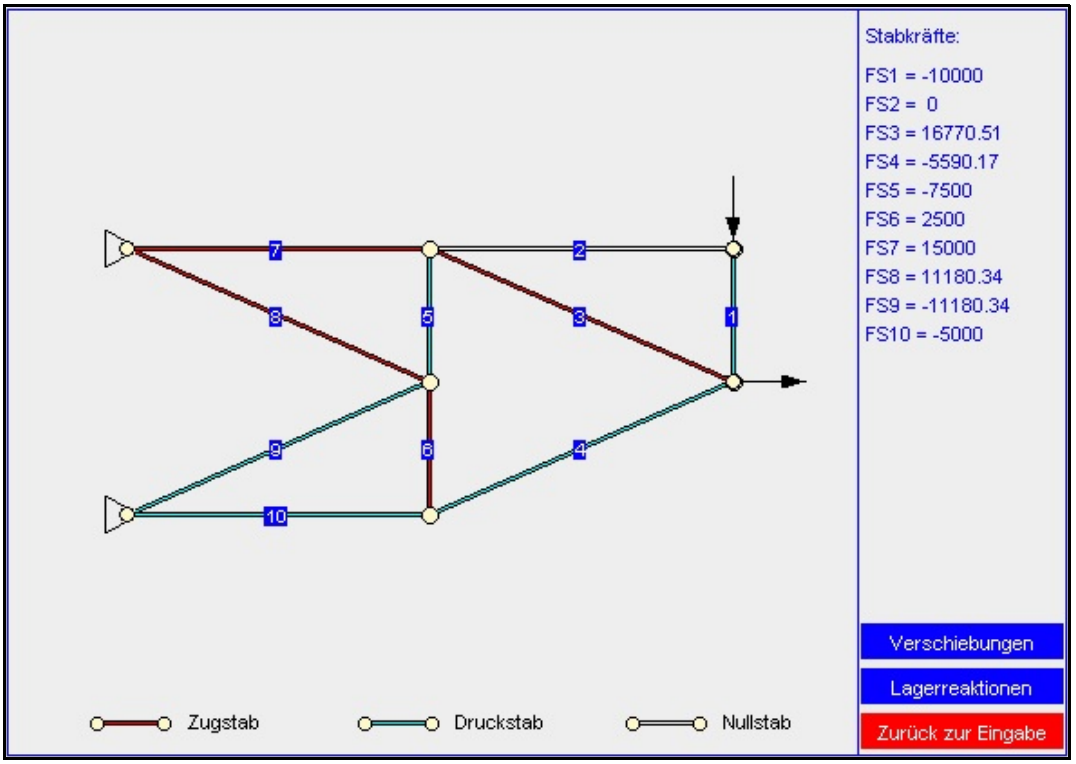


Die Kontrollrechnung mit dem Programm "Statisch unbestimmte gerade Biegeträger" (www.TM-interaktiv.de) bestätigt die Ergebnisse:

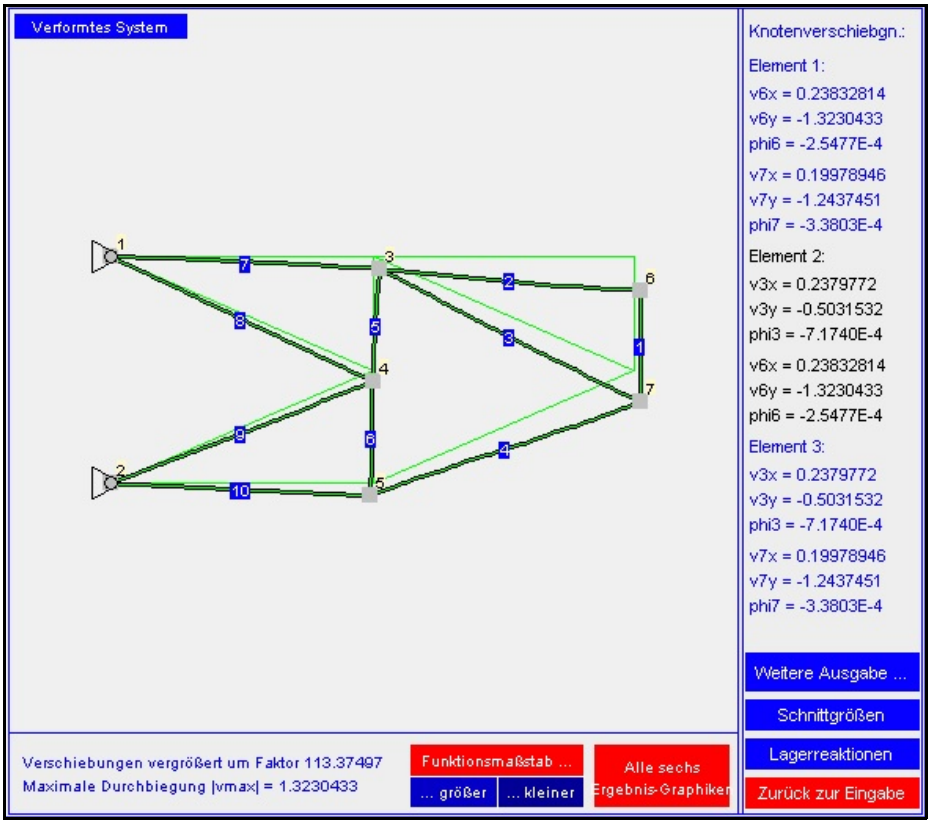


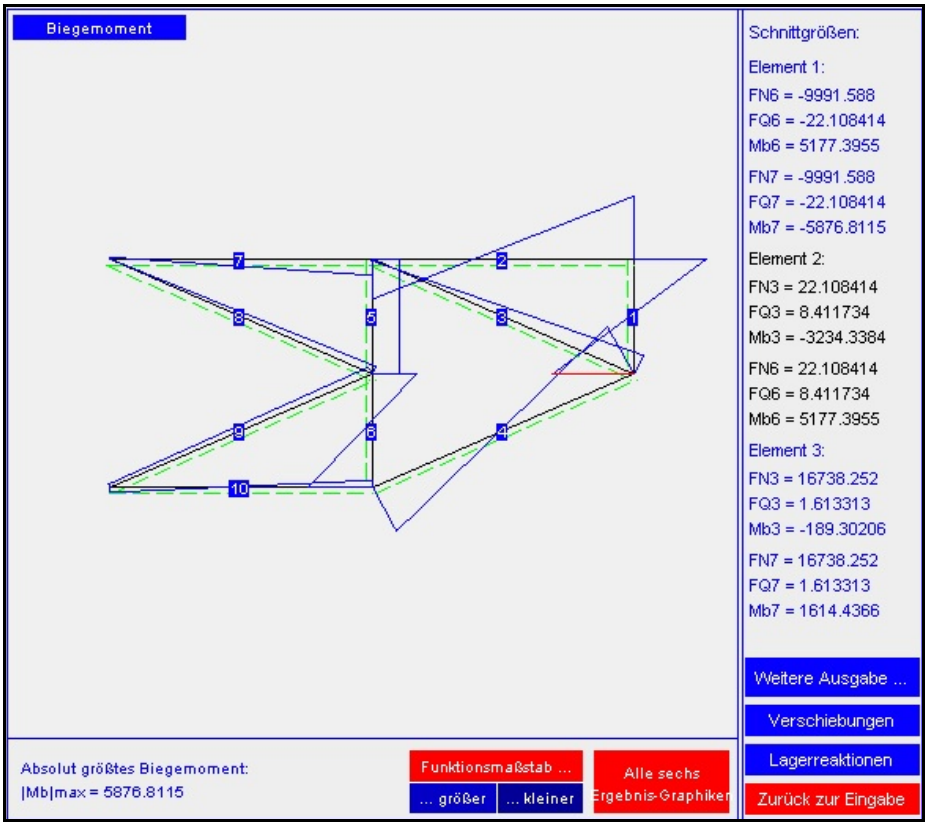
Lösung 18.4: *a)* Mit dem Programm "Statisch unbestimmte ebene Fachwerke" (www.TM-interaktiv.de) werden die Knotenverschiebungen und die Stabkräfte berechnet:





b) Mit dem Programm "Biege- und dehnsteife ebene Rahmen" (www.TM-interaktiv.de) werden die Knotenverschiebungen und die Schnittgrößen berechnet:





c) Die Verschiebungen der nicht gelagerten Knoten 3 bis 7 werden für die beiden Berechnungsmodelle in folgender Tabelle zusammengestellt. Die Unterschiede sind marginal:

Knoten	**Ideales Fachwerk**		**Biegesteifes Tragwerk**	
	u_x [mm]	u_y [mm]	u_x [mm]	u_y [mm]
3	0,2381	− 0,5032	0,2380	− 0,5032
4	0	− 0,4437	0,00018	− 0,4437
5	− 0,0794	− 0,4635	− 0,0795	− 0,4635
6	0,2381	− 1,3238	0,2383	− 1,3230
7	0,2002	− 1,2445	0,1998	− 1,2437

Die Spannungen ergeben sich aus den Stabkräften bzw. Schnittgrößen nach folgenden Formeln:

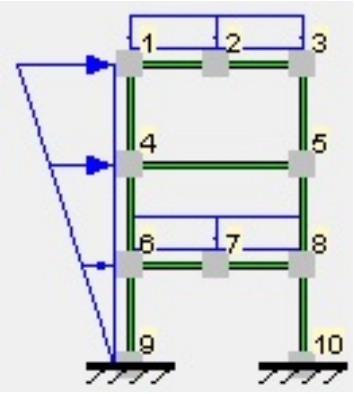
$$\sigma_S = \frac{F_S}{A} \;;\quad \sigma_N = \frac{F_N}{A} \;;\quad \left|\sigma_{b\max}\right| = \frac{\left|M_{b\max}\right|}{W} \;;\quad A = 300\ mm^2 \;;\quad W = 1000\ mm^3 \;.$$

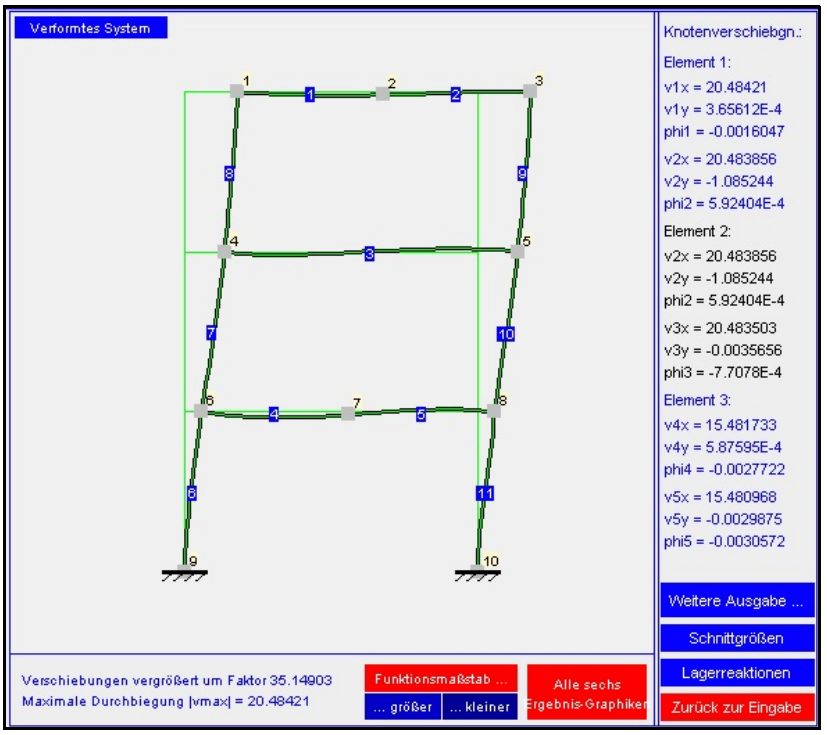
Die nachfolgende Zusammenstellung zeigt, dass die Biegespannungen deutlich kleiner als die Spannungen infolge der Normalkräfte sind. Die größten Spannungen treten in den Stäben bzw. Biegeträgern 3 und 7 auf. Die Abweichungen der beiden Rechnungen sind dort kleiner als 3%.

Element	**Fachwerk**	**Biegesteifes Tragwerk**		
	σ_S [N/mm^2]	σ_N [N/mm^2]	σ_{bmax} [N/mm^2]	σ_{max} [N/mm^2]
1	− 33,33	− 33,31	− 5,88	− 39,18
2	0	0,074	5,18	5,25
3	55,90	55,79	1,61	57,41
4	− 18,63	− 18,62	− 4,26	− 22,88
5	− 25,00	− 24,99	− 2,04	− 27,03
6	8,33	8,35	4,62	12,97
7	50,00	49,98	1,39	51,36
8	37,27	37,30	0,72	38,01
9	− 37,27	− 37,24	− 0,52	− 37,76
10	− 16,67	− 16,69	− 0,58	− 17,28

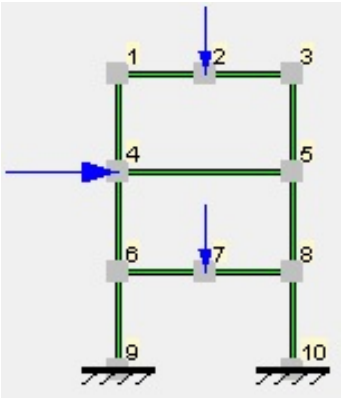
Lösung 18.5: *a)* Mit dem Programm "Biege- und dehnsteife ebene Rahmen" (www.TM-interaktiv.de) werden die Knotenverschiebungen berechnet.

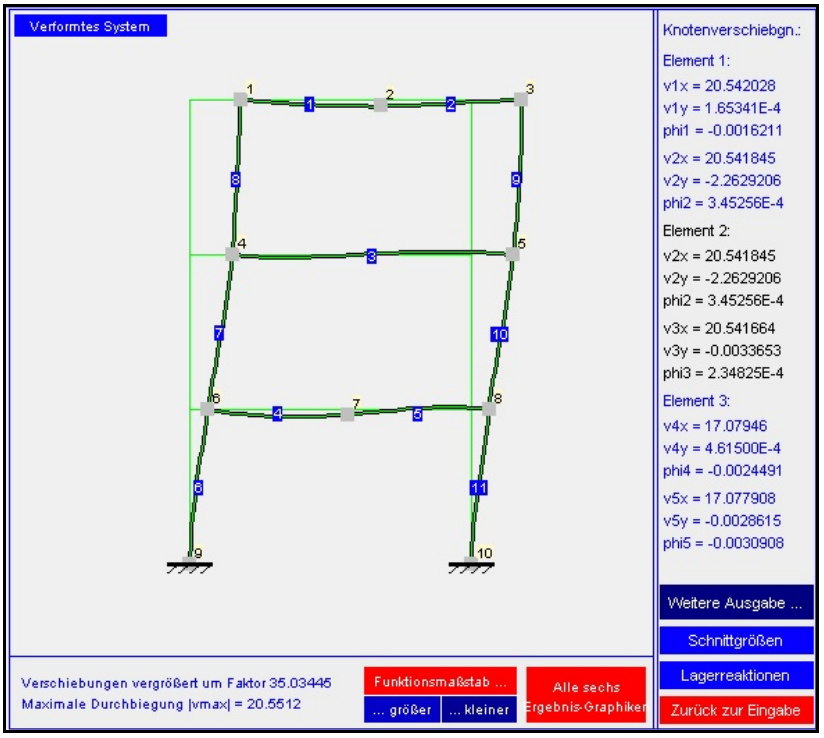
System mit Linienlasten:



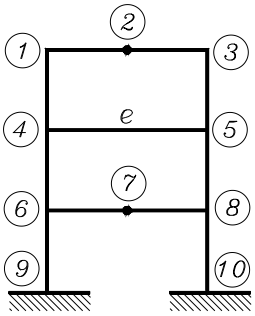


System mit Einzelkräften:



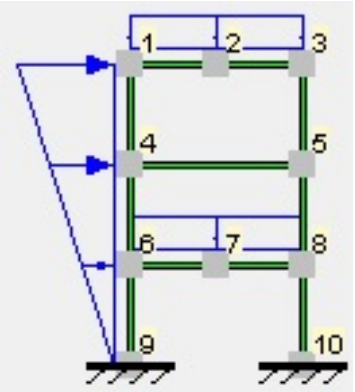


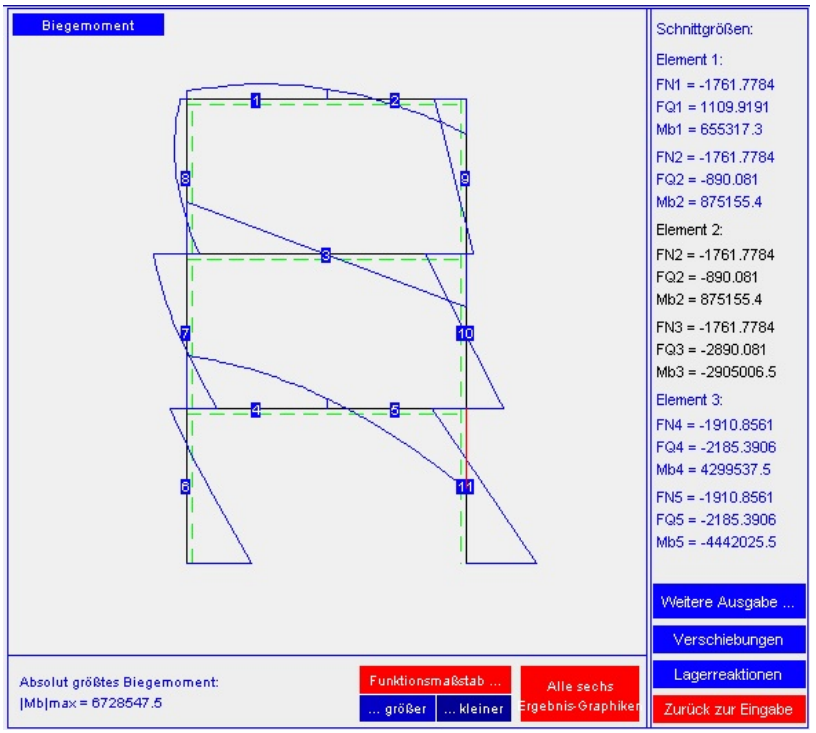
Die nachfolgende Skizze zeigt die für die Berechnung gewählte Knotennummerierung. In der Tabelle sind ausgewählte Verschiebungen zusammengestellt (v_{ix} nach rechts und v_{iy} nach oben positiv). Die Vertikalverschiebungen sind nur für die beiden angegebenen Punkte 2 und 7 nennenswert unterschiedlich.



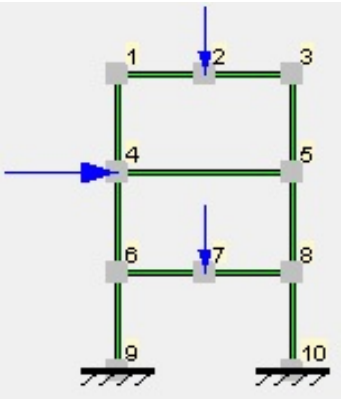
	Linien-lasten	Einzel-kräfte
v_{1x} [mm]	20,4842	20,5420
v_{2x} [mm]	20,4839	20,5418
v_{3x} [mm]	20,4835	20,5417
v_{4x} [mm]	15,4817	17,0795
v_{5x} [mm]	15,4810	17,0779
v_{6x} [mm]	6,6169	7,1544
v_{7x} [mm]	6,6166	7,1543
v_{8x} [mm]	6,6164	7,1542
v_{2y} [mm]	– 1,0852	– 2,2629
$v_{7,y}$ [mm]	– 1,0252	– 1,8501

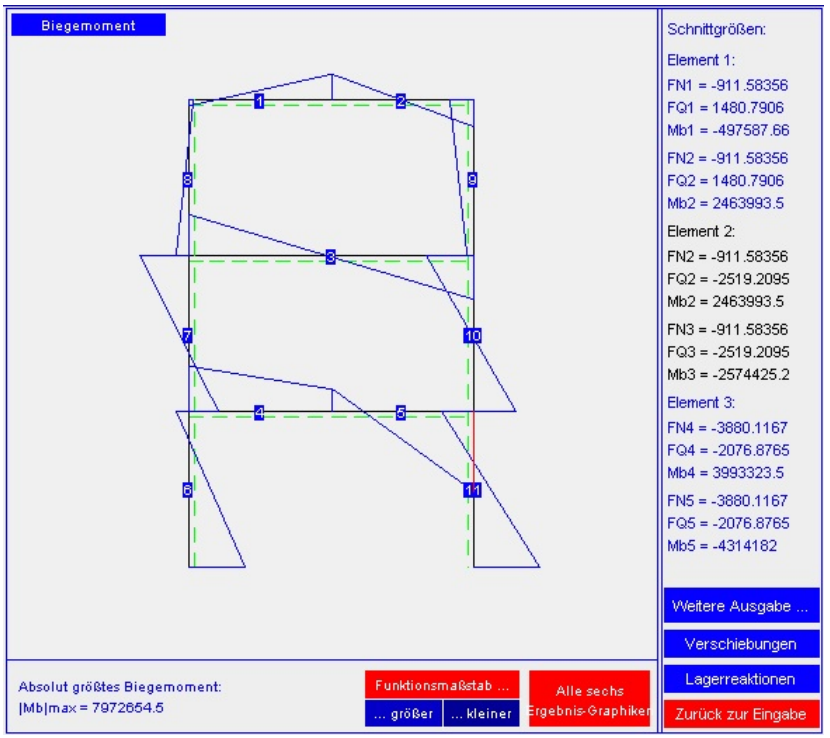
b) Berechnung der Schnittgrößen mit Linienlasten:



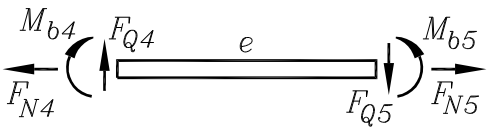


Berechnung der Schnittgrößen mit Einzelkräften:





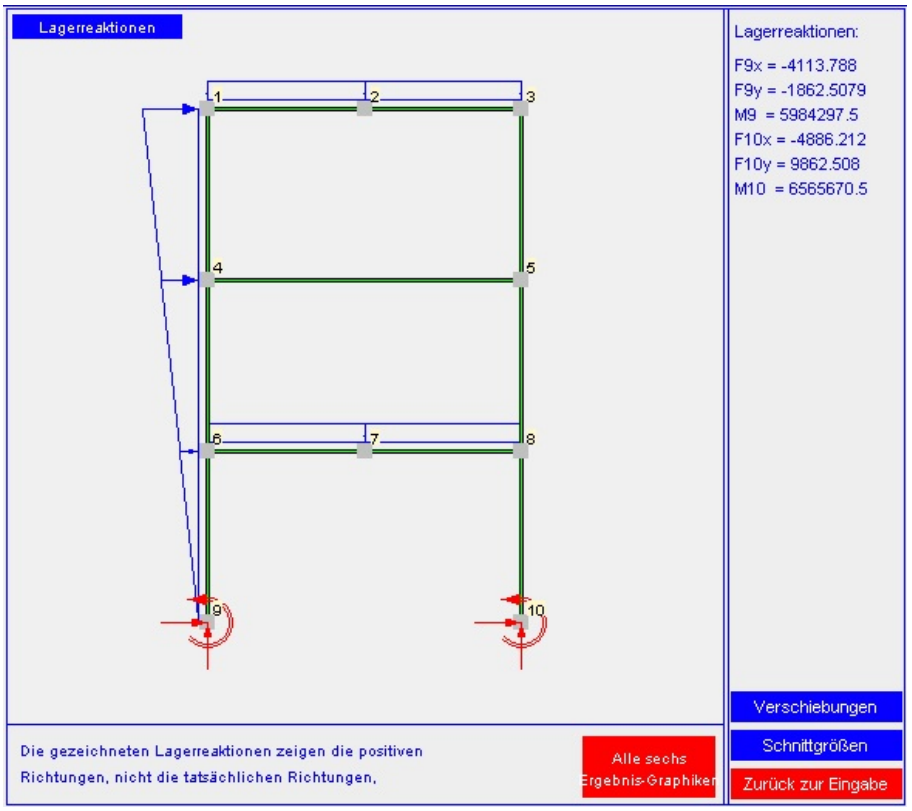
Die Schnittgrößen für das Element *e* mit den Knoten 4 und 5 werden für beide Lastfälle in nachfolgender Tabelle zusammengestellt. Die Skizze rechts zeigt die Definitionen für die Schnittgrößen an den beiden Knoten.



	Linienlasten	Einzelkräfte
$F_{N4} = F_{N5}$	– 1910,9 N	– 3880,1 N
$F_{Q4} = F_{Q5}$	– 2185,4 N	– 2076,9 N
M_{b4}	4299,5 Nm	3993,3 Nm
M_{b5}	– 4442,0 Nm	– 4314,2 Nm

Die Schnittgrößen zeigen mit Ausnahme der Normalkräfte keine großen Unterschiede. Für die Normalkräfte wird der Unterschied dadurch verursacht, dass die Resultierende der Linienlast genau auf der Höhe des betrachteten Elements *e* angreift.

c) Auch die Lagerreaktionen werden mit dem Programm "Biege- und dehnsteife ebene Rahmen" berechnet. Nachfolgend ist das Ergebnis für den Lastfall "Linienlasten" zu sehen (Dimensionen N bzw. Nmm):



Man erkennt sofort, dass die Summe der beiden Vertikalkomponenten der Lagerkräfte der Summe der Resultierenden der beiden vertikal gerichten Linienlasten ist. Die Summe der Horizontalkomponenten der Lagerkräfte ist gleich der Resultierenden der Dreieckslast.

Weitere Gleichgewichtskontrollen sind etwas mühsamer, bestätigen aber die errechneten Ergebnisse.